

Chapitre V

Dualité

La dualité associe à tout problème linéaire un autre problème linéaire qui est appelé **problème** dual du problème initial ; par opposition le problème initial est appelé **problème primal**.

La notion de dualité en P.L. est très intéressante puisqu'elle permet de montrer qu'un problème d'**allocation optimale des ressources rares** est aussi un problème de **tarification optimale de ces ressources**.

Exemple 1

Reprenons le modèle de l'entreprise Remox décrit au chapitre 3, que nous dénoterons (P) :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exemple 1

Une entreprise concurrente à Remox se propose d'acheter son stock. Soit u_1 , u_2 et u_3 les prix respectifs d'une unité de la ressource A , de B et de C . Quels prix minimaux u_1 , u_2 et u_3 doit-elle offrir à Remox tout en restant compétitif en ce qui concerne le marché précédent ?

Exemple 1

Le problème revient à rendre minimum le coût recherché par l'entreprise concurrente

$$\min w = 24u_1 + 17u_2 + 24u_3$$

Compte tenu des contraintes suivantes :

$$2u_1 + 1u_2 + 1u_3 \geq 7 \quad (\text{Produit 1})$$

$$4u_1 + 1u_2 + 2u_3 \geq 9 \quad (\text{Produit 2})$$

$$5u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 18 \quad (\text{Produit 3})$$

$$7u_1 + 1u_2 + 3u_3 \geq 17 \quad (\text{Produit 4})$$

Et il est raisonnable de penser que

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

Exemple 1

Finalement, pour déterminer les prix unitaires minimaux qu'elle proposera à Remox, l'entreprise concurrente devrait résoudre le programme linéaire suivant :

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } w = 42u_1 + 17u_2 + 24u_3 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 \geq 7 \\ 4u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 9 \\ 5u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 18 \\ 7u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 17 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exemple 1

			Primal (Max)						
			Coeff. des x_i					S.M	
			x_1	x_2	x_3	x_4		b	
Dual (Min)	Coeff. des u_j	u_1	2	4	5	7	\leq	42	Coeff. dans w
		u_2	1	1	2	2	\leq	17	
		u_3	1	2	3	3	\leq	24	
			\forall	\forall	\forall	\forall			
	S.M.	c	7	9	18	17			
			Coeff. dans z						

Exemple 2

Un pharmacien doit préparer une poudre vitaminée contenant au moins 25 mg de vitamine A , 60 mg de vitamine B et 15 mg de vitamine C . Il s'approvisionne auprès un laboratoire qui vend deux types de poudre vitaminée en sachet :

- une poudre X de 20 mg de A , 30 mg de B et 5 mg de C , au prix de 60 dh ;
- une poudre Y de 5 mg de A , 20 mg de B et 10 mg de C , au prix de 90 dh ;

Combien doit-il se procurer de poudre X et de poudre Y pour assurer, au coût minimum, son nouveau poudre ?

Exemple 2

Le problème du pharmacien se formule :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = 60x_1 + 90x_2 \\ 20x_1 + 5x_2 \geq 25 \\ 30x_1 + 20x_2 \geq 60 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

où x_1 et x_2 les nombres de poudres de types X et Y qu'il doit mélanger.

Le laboratoire décide de vendre séparément les vitamines A , B et C en sachet de 25, 60 et 15 unités. Combien doit-il vendre l'unité de chaque vitamine pour être compétitif avec le pharmacien ?

Exemple 2

Soient u_1 , u_2 et u_3 les prix unitaires respectifs de A , B et C . Le labo cherche donc à maximiser son chiffre d'affaire :

$$w = 25u_1 + 60u_2 + 15u_3$$

Le labo doit fixer les prix offerts pour les vitas de façon à ce que :

- un mélange équivalent à X ne coûte pas plus cher que la X ;
- un mélange équivalent à Y ne coûte pas plus cher que Y .

Ce qu'on peut écrire :

$$20u_1 + 30u_2 + 5u_3 \leq 60$$

$$5u_1 + 20u_2 + 10u_3 \leq 90$$

Et il est raisonnable de penser que : $u_1, u_2, u_3 \geq 0$.

Exemple 2

Finalement, pour déterminer les prix unitaires maximaux qu'il ne doit pas dépasser pour rester compétitif, le labo devrait résoudre le programme linéaire suivant :

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } w = 20u_1 + 60u_2 + 15u_3 \\ 20u_1 + 30u_2 + 5u_3 \leq 60 \\ 5u_1 + 20u_2 + 10u_3 \leq 90 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Définition du problème dual

Soit le problème primal

$$(P) \quad \begin{cases} \max & c x \\ & A x \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Le problème dual correspondant est

$$(D) \quad \begin{cases} \min & u b \\ & A^t u \geq c \\ & u \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Définition du problème dual

Si le problème primal est un PL à minimiser, sa forme canonique est du type (2), et celle de son dual est du type (1) ; on en déduit immédiatement que **le dual du dual est le primal** lui-même.

Définition du problème dual

Les règles de passage du primal au dual sont simples : elles résultent pour la plupart de la transposition de \mathbf{A} .

- \mathbf{A} étant de $p \times n$, le primal possède n variables et le dual p variables
- Le second membre du primal devient le vecteur des coefficients de la fonction objectif du dual et réciproquement.
- Si le primal est un problème de maximisation, le dual est un problème de minimisation et réciproquement.
- Le sens des contraintes réelles est inversé.
- Les variables duales doivent être positives ou nulles.

Exemple 1

Soit le problème linéaire

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{max} \quad x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Son dual est

Exemple 1

Soit le problème linéaire

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{max} \quad x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Son dual est

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{min} \quad 14u_1 + 12u_2 + 12u_3 \\ u_1 - 2u_2 + 2u_3 \geq 1 \\ u_1 + 3u_2 - u_3 \geq 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exemple 2

Soit le problème linéaire

$$(P) \quad \begin{cases} \min -x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Son dual est

Exemple 2

Soit le problème linéaire

$$(P) \quad \begin{cases} \min -x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \min -x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \\ -x_1 - x_2 \geq -5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Son dual est

Exemple 2

Soit le problème linéaire

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min -x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min -x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ -x_1 + x_2 \geq -2 \\ -x_1 - x_2 \geq -5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Son dual est

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max -2u_1 - 2u_2 - 5u_3 \\ 2u_1 - u_2 - u_3 \leq -1 \\ -u_1 + u_2 - u_3 \leq 1 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exemple 3

Soit le problème linéaire

$$(P) \quad \begin{cases} \max 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Son dual est

Exemple 3

Soit le problème linéaire

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max 5x_1 + 7x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq -6 \\ -x_1 \leq -4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Son dual est

Exemple 3

Soit le problème linéaire

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max 5x_1 + 7x_2 \\ -x_1 - x_2 \leq -6 \\ -x_1 \leq -4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Son dual est

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min -6u_1 - 4u_2 + 3u_3 \\ -u_1 - u_2 \geq 5 \\ -u_1 + u_3 \geq 7 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Contraintes d'égalité

Si le problème primal est sous la forme

$$(P) \quad \begin{cases} \min & c x \\ & A x = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

le problème dual correspondant est

$$(D) \quad \begin{cases} \max & u b \\ & A^t u \leq c \\ & u \text{ qcq} \end{cases} \quad (3)$$

Nous pouvons vérifier, en mettant la forme standard (3) sous la forme (2), que cette définition est cohérente avec la précédente.

Règles de dualisation

Le tableau suivant donne un ensemble de règles formelles permettant de passer d'un problème de P.L. **général** à sa forme duale.

max		min
$x_j \geq 0$	\iff	contrainte $j \geq$
$x_j \leq 0$	\iff	contrainte $j \leq$
x_j qcq	\iff	contrainte $j =$
contrainte $i \leq$	\iff	$u_i \geq 0$
contrainte $i \geq$	\iff	$u_i \leq 0$
contrainte $i =$	\iff	u_i qcq

Propriétés de la dualité

Considérons un problème linéaire de maximisation – le primal – sous sa forme canonique et son dual

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P)} & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{z} = \max z = c x \\ \mathbf{A}x \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. & \text{(D)} & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w} = \min w = u b \\ u\mathbf{A} \geq c \\ u \geq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Propriétés de la dualité : Dualité faible

Propriété 1 :

Si \bar{x} et \bar{u} sont des solutions réalisables respectivement du primal (maximum) et du dual (minimum), elles vérifient :

$$c\bar{x} \leq \bar{u}b$$

En effet,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}\bar{x} \leq b \quad \text{et} \quad \bar{u} \geq 0 \\ \bar{u}\mathbf{A} \geq c \quad \text{et} \quad \bar{x} \geq 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}\mathbf{A}\bar{x} \leq \bar{u}b \\ \bar{u}\mathbf{A}\bar{x} \geq c\bar{x} \end{array} \right. \implies c\bar{x} \leq \bar{u}b$$

Propriétés de la dualité

Corollaire :

Une solution réalisable du dual (resp. primal) fournit une borne supérieure (resp. inférieure) de w (resp. z) :

$$\tilde{z} \leq ub \quad \forall u \text{ réalisable du dual}$$

$$\tilde{w} \geq cx \quad \forall x \text{ réalisable du primal}$$

Propriétés de la dualité

Condition suffisante d'optimalité

Corollaire :

Soient \bar{x} et \bar{u} des solutions réalisables respectivement du primal et du dual. Si $c\bar{x} = \bar{u}b$, alors \bar{x} et \bar{u} sont solutions optimales

En effet, si \bar{x} n'est pas solution optimale, il existe une solution réalisable x^* pour laquelle $c\bar{x} < cx^*$. On aurait donc $\bar{u}b < cx^*$, ce qui est impossible en vertu de la propriété 1.

Propriétés de la dualité

Corollaire :

Si un problème possède une valeur optimale infinie, son dual est impossible.

En effet, supposons que $\tilde{z} = +\infty$. D'après le corollaire 1 :

$ub \geq +\infty$ pour toute solution réalisable u du dual

ce qui est impossible.

Même démonstration si le dual est non borné.

$\tilde{w} = -\infty \implies ub \leq -\infty \implies$ le primal est impossible

Propriétés de la dualité : Dualité forte

Corollaire :

L'égalité des fonctions économiques du primal et du dual est donc une **C.N.S.** d'optimalité pour des solutions réalisables des deux problèmes.

Propriétés de la dualité : Dualité faible

Propriété 2 :

Si le problème primal (resp. dual) possède une solution optimale finie, alors il en de même pour le problème dual (resp. primal) et de plus $\tilde{z} = \tilde{w}$.

Propriétés de la dualité

Propriété 2 :

Pour une paire de problèmes liés par la dualité :

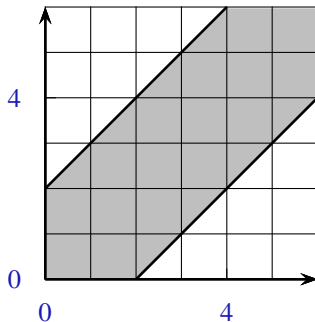
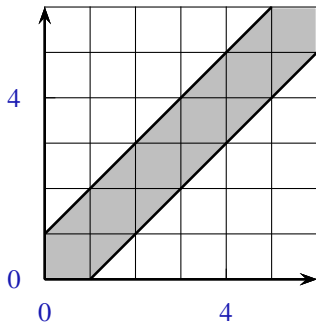
- 1° soit les deux problèmes ont des solutions optimales finies (propriété 2) ;
- 2° soit un problème est non borné et l'autre est impossible (corollaire 3) ;
- 3° soit les deux problèmes sont impossibles.

Voir Illustrations ci-après

Les deux problèmes ont des solutions finies

$$(P) \quad \begin{cases} \min & 2x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & -x_1 + x_2 \geq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

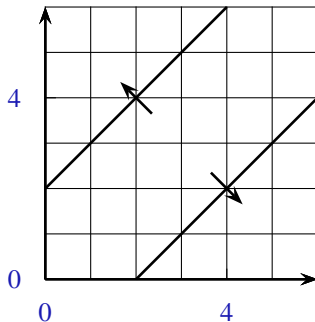
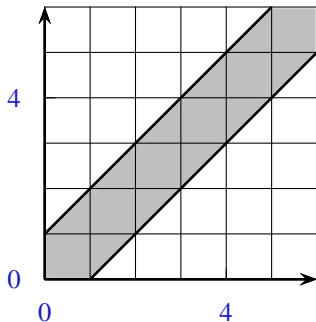
$$(D) \quad \begin{cases} \max & -u_1 - u_2 \\ & u_1 - u_2 \leq 2 \\ & -u_1 + u_2 \leq 2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$



Un problème est impossible ; l'autre est non borné

$$(P) \quad \begin{cases} \max & 2x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

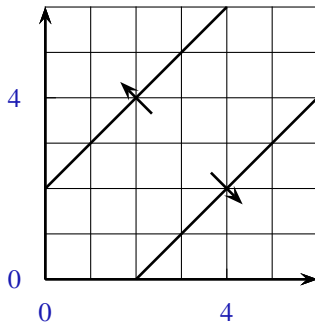
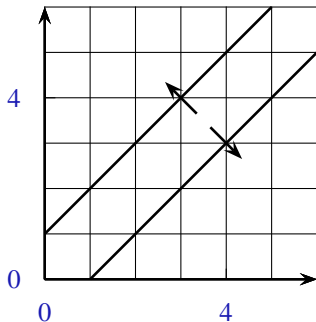
$$(D) \quad \begin{cases} \min & u_1 + u_2 \\ & -u_1 + u_2 \geq 2 \\ & u_1 - u_2 \geq 2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$



Les deux problèmes sont impossibles

$$(P) \quad \begin{cases} \max & 2x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D) \quad \begin{cases} \min & -u_1 - u_2 \\ & u_1 - u_2 \geq 2 \\ & -u_1 + u_2 \geq 2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$



Théorème des écarts complémentaires

Considérons un problème linéaire de maximisation – le primal – sous sa forme canonique et son dual

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P)} & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{z} = \max z = c x \\ \mathbf{A}x \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. & \text{(D)} & \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w} = \min w = u b \\ u \mathbf{A} \geq c \\ u \geq 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Théorème des écarts complémentaires

Propriété 1 :

Soient \bar{x} et \bar{u} deux solutions réalisables respectivement du primal et du dual. Une CNS pour que \bar{x} et \bar{u} soient solutions optimales, est qu'elles vérifient les relations :

$$\bar{u} (\mathbf{A}\bar{x} - b) = 0$$

$$(c - \bar{u}\mathbf{A})\bar{x} = 0$$

Etant donné que par hypothèse,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u} (b - \mathbf{A}\bar{x}) = \alpha \geq 0 \\ (\bar{u}\mathbf{A} - c)\bar{x} = \beta \geq 0 \end{array} \right\} \implies c\bar{x} - \bar{u}b = \alpha + \beta \geq 0$$

Théorème des écarts complémentaires

Appelons

$$(L_i x \leq b_i, \quad u_i \geq 0) \quad i = 1, \dots, m$$

ou

$$(x_j \geq 0, \quad u C_j \geq c_j, \quad) \quad j = 1, \dots, n$$

des couples de contraintes duales.

Convenons qu'une contrainte d'inégalité (\leq ou \geq) est dite serrée pour une solution, si elle est vérifiée avec le signe d'égalité (=).

Théorème des écarts complémentaires

Le théorème des écarts complémentaires peut alors s'énoncer :

Propriété 1 :

A l'optimum, dans tout couple de contraintes duales, il y a au moins une contrainte serrée.

Ainsi, si \bar{x} et \bar{u} sont des solutions optimales, respectivement du primal et du dual, on en déduit :

- $\bar{x}_j > 0 \longrightarrow \bar{u}C_j = c_j$
- $L_i\bar{x} < b_i \longrightarrow \bar{u}_i = 0$
- $\bar{u}_i > 0 \longrightarrow L_i\bar{x} = b_i$
- $\bar{u}C_j > c_j \longrightarrow \bar{x}_j = 0$

Théorème des écarts complémentaires

En introduisant les variables d'écart y et v des contraintes réelles du primal et du dual :

$$Ax + y = b$$

$$uA - v = c$$

Le théorème des écarts complémentaires s'écrit simplement :

$$x_i v_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_j u_j = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

ce qui justifie l'appellation « écarts complémentaires ».

Exemple

Appliquons le TEC au problème linéaire suivant :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{max } 15x_1 + 25x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 96 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 238 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exemple

Son dual est le problème linéaire suivant :

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \min & 96u_1 + 40u_2 + 238u_3 \\ & u_1 + u_2 + 7u_3 \geq 15 \\ & 3u_1 + u_2 + 4u_3 \geq 25 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exemple

Soit la solution primale

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 32$$

- Les deux dernières contraintes ne sont pas saturées
 \implies les deux variables duales associées sont nulles ;
- $x_2 > 0 \implies 2^{\text{ieme}}$ contrainte duale saturée ;
- Donc $3u_1 = 25 \implies u_1 = 25/3$ (et $u_2 = u_3 = 0$) ;
- Cette solution ne satisfait pas la 1^{ere} contrainte duale
 \implies non réalisable ! ;
- La solution primale précédente n'est donc **pas optimale** !

Exemple

Considérons maintenant la solution primale :

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 28$$

- La dernière contrainte n'est pas saturée
 \implies la variables duale associée est nulle ;
- $x_1, x_2 > 0 \implies$ 2 contraintes duales saturées ;
- On obtient donc le système suivant :

$$u_1 + u_2 = 15$$

$$3u_1 + u_2 = 25$$

- On fait la différence des 2 égalités

$$2u_1 = 10 \implies u_1 = 5 \implies u_2 = 10$$

- Cette solution est admissible pour (D) $\implies x_1 = 12, x_2 = 28$
est **optimale**